
116.71
38.2%: 119.29
51.25%: 108.98
61.6 %: 99.19
104.19
86.72
72.48

Financial Engineering

ณัฐวุฒิ คูวัฒนเธียรชัย

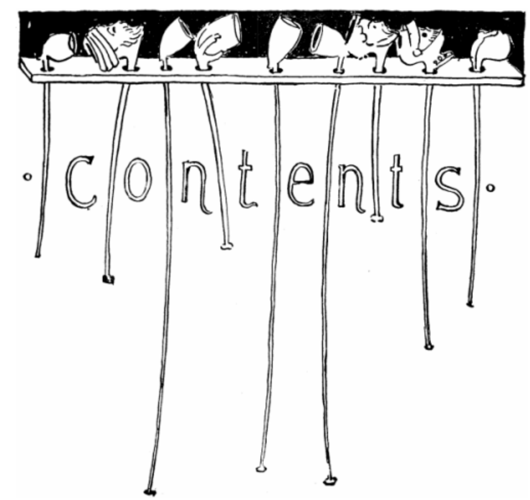
Lecture 3

เงินงวด

(Annuities)

หัวข้อการบรรยาย

- เงินงวดที่จ่ายปีต่อปีแบบย้อนหลัง
- เงินงวดที่จ่ายปีต่อปีแบบล่วงหน้า
- เงินงวดที่จ่ายทุกครึ่งปีแบบย้อนหลัง
- เงินงวดที่จ่ายทุกครึ่งปีแบบล่วงหน้า
- เงินงวดที่จ่ายต่อเดือน
- เงินงวดจ่ายทันทีและเลื่อนจ่าย



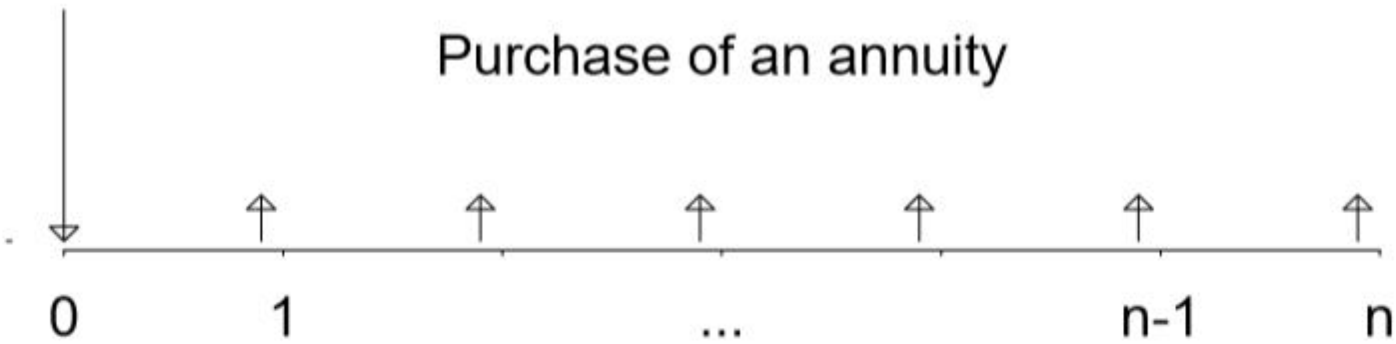
เอกสารประกอบการสอน

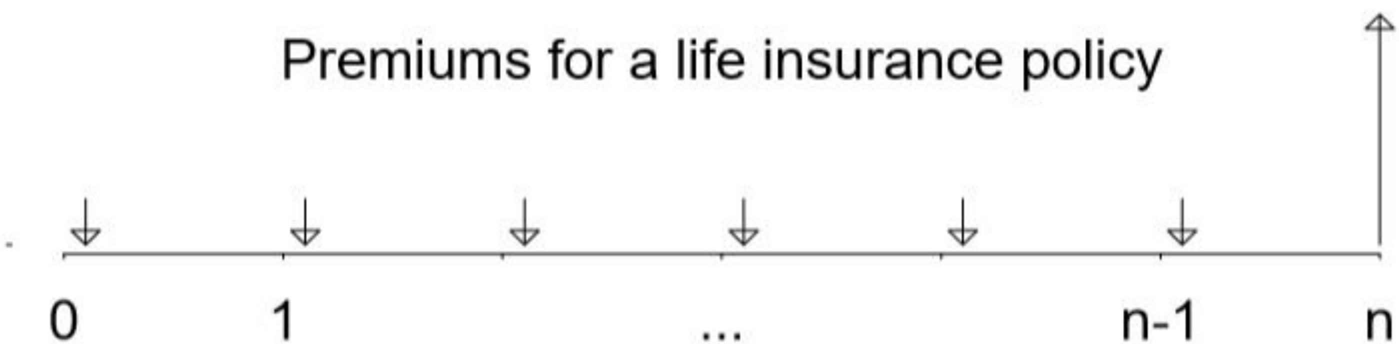
- Arcones Study Manual for SOA Exam FM/CAS Exam 2, by Miguel A. Arcones.

เงินงวด

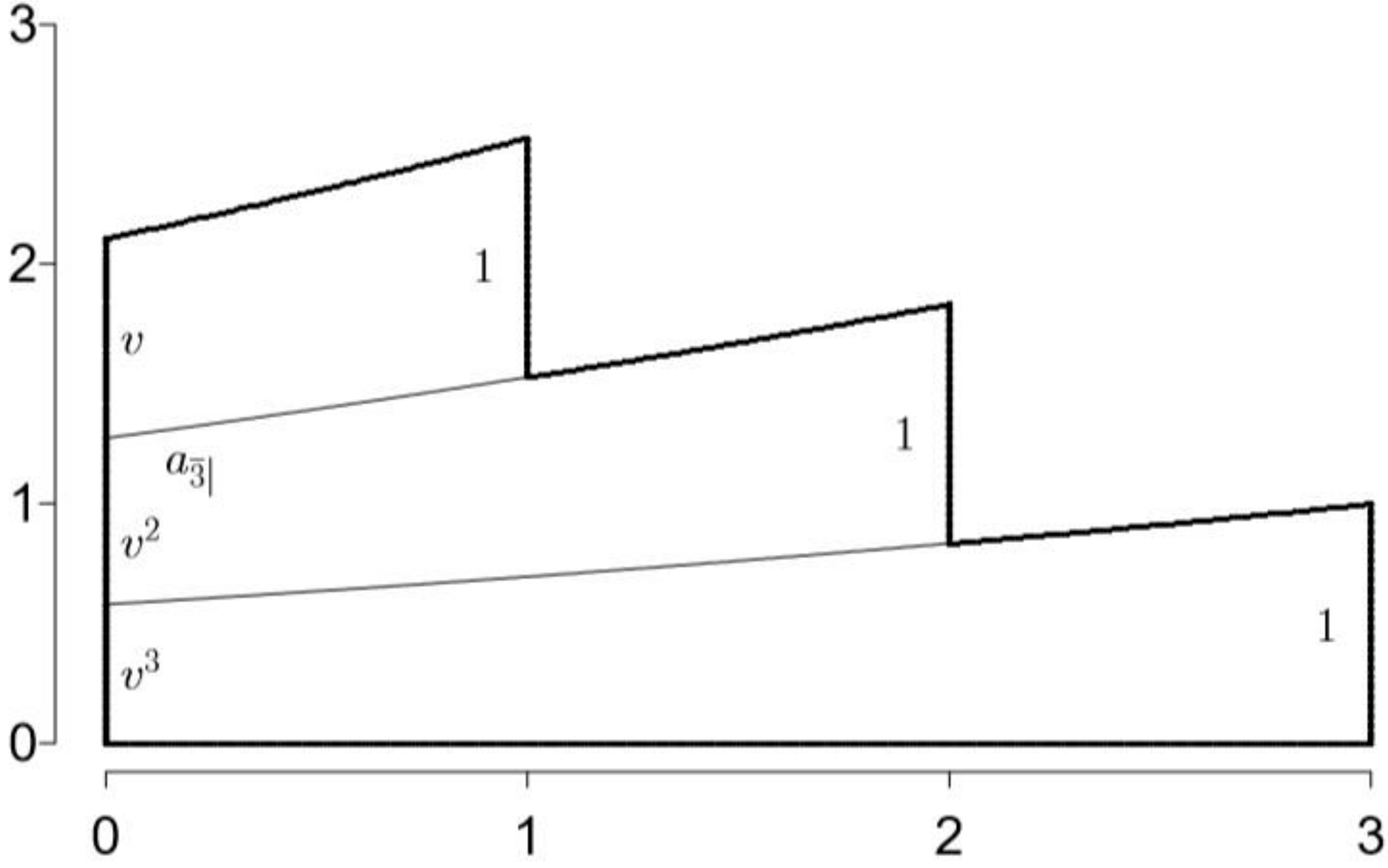
- นิยาม
  - การจ่ายเงินแบบประจำอย่างต่อเนื่อง ภายใต้เงื่อนไขบางประการ เช่น
    - เจ้าของเงินงวดยังมีชีวิตอยู่
    - จนกระทั่งสิ้นอายุตามสัญญา
  - เงินงวดอาจถูกจ่ายแบบปีต่อปี หรือบ่อยครั้งกว่านั้น

ตัวอย่างเงินงวด

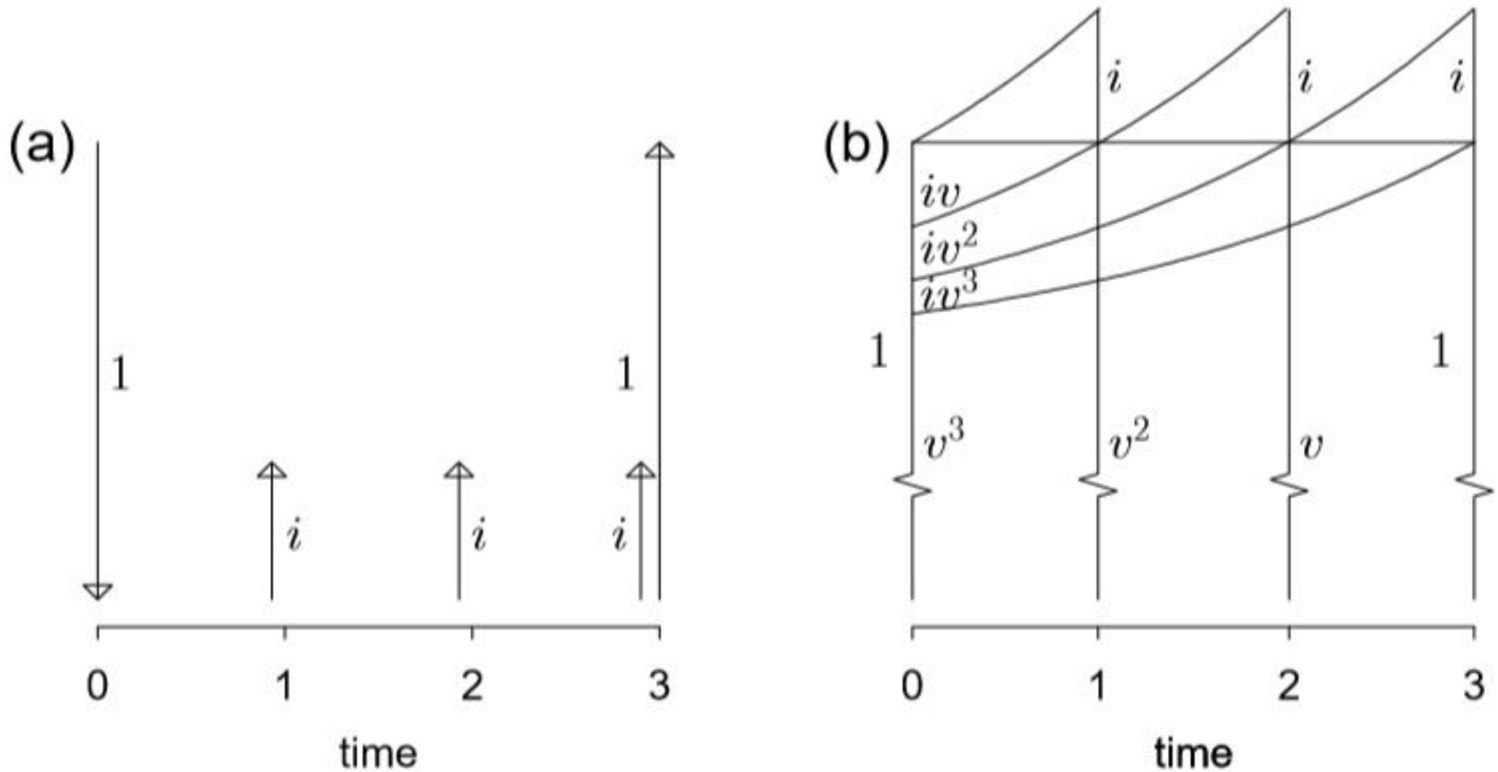




เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบย้อนหลัง



เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบย้อนหลัง



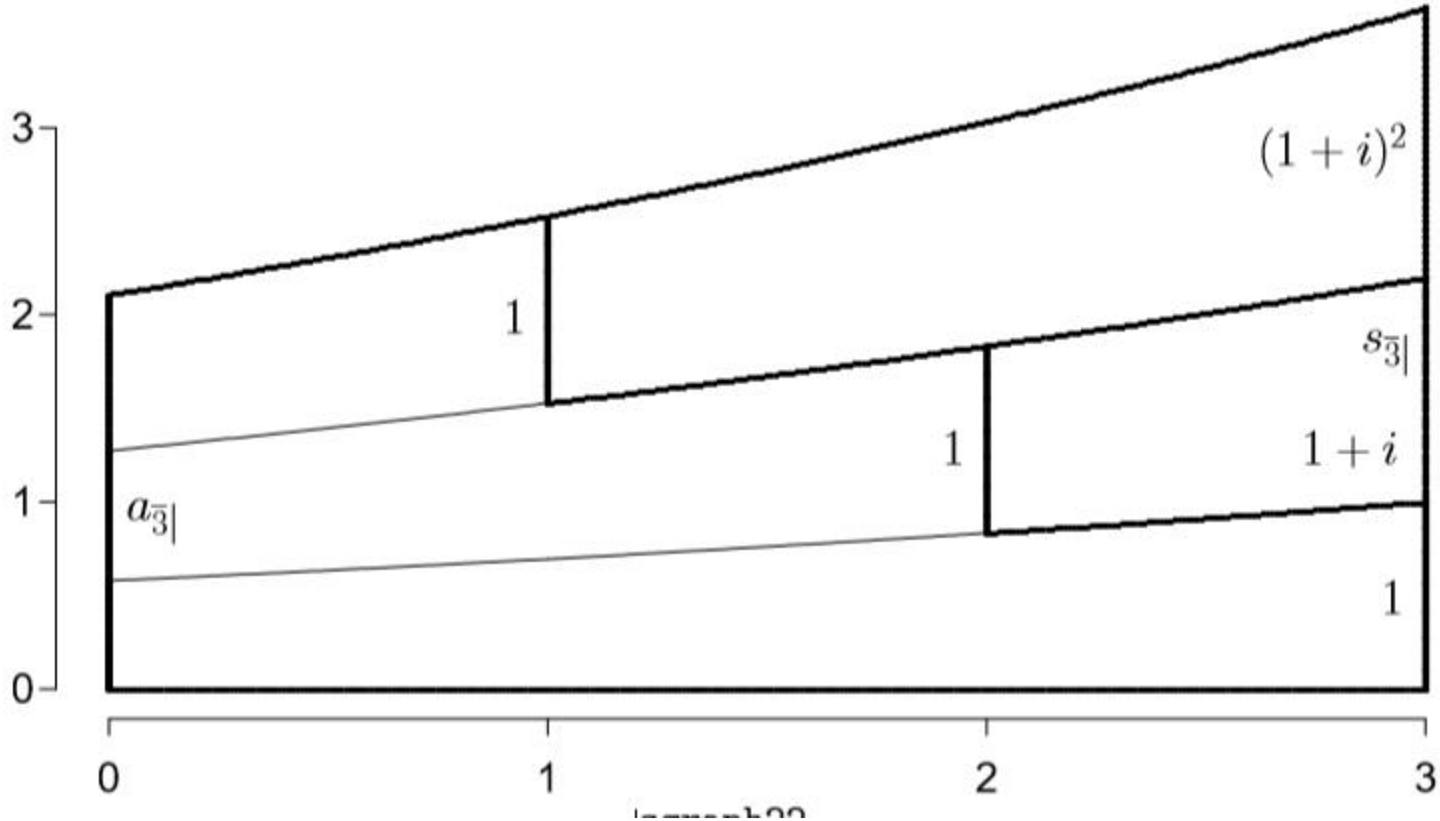
เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบย้อนหลัง

- มูลค่าปัจจุบัน (จากแผนภาพ)
  - $a_{\overline{3|}} = v + v^2 + v^3$
    - เทียบได้กับเงินกู้จำนวน $a_{\overline{3|}}$ ที่มีการจ่ายเงินคืนงวดละ \$1 ซึ่งรวมเงินต้นที่ต้องจ่ายเงินและดอกเบี้ยไว้ด้วยกัน
  - $1 = i(v + v^2 + v^3) + v^3 \rightarrow a_{\overline{3|}} = (1 - v^3)/i$
    - เทียบได้กับการฝากเงินในธนาคารในวันนี้เป็นจำนวน \$1 เพื่อถอนคืนในปีที่ 3 ในระหว่างนี้ก็ถอนดอกเบี้ยออกมาใช้ปีละ i
- สูตรทั่วไป
  - $a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \ldots + v^n = (1 - v^n)/i$

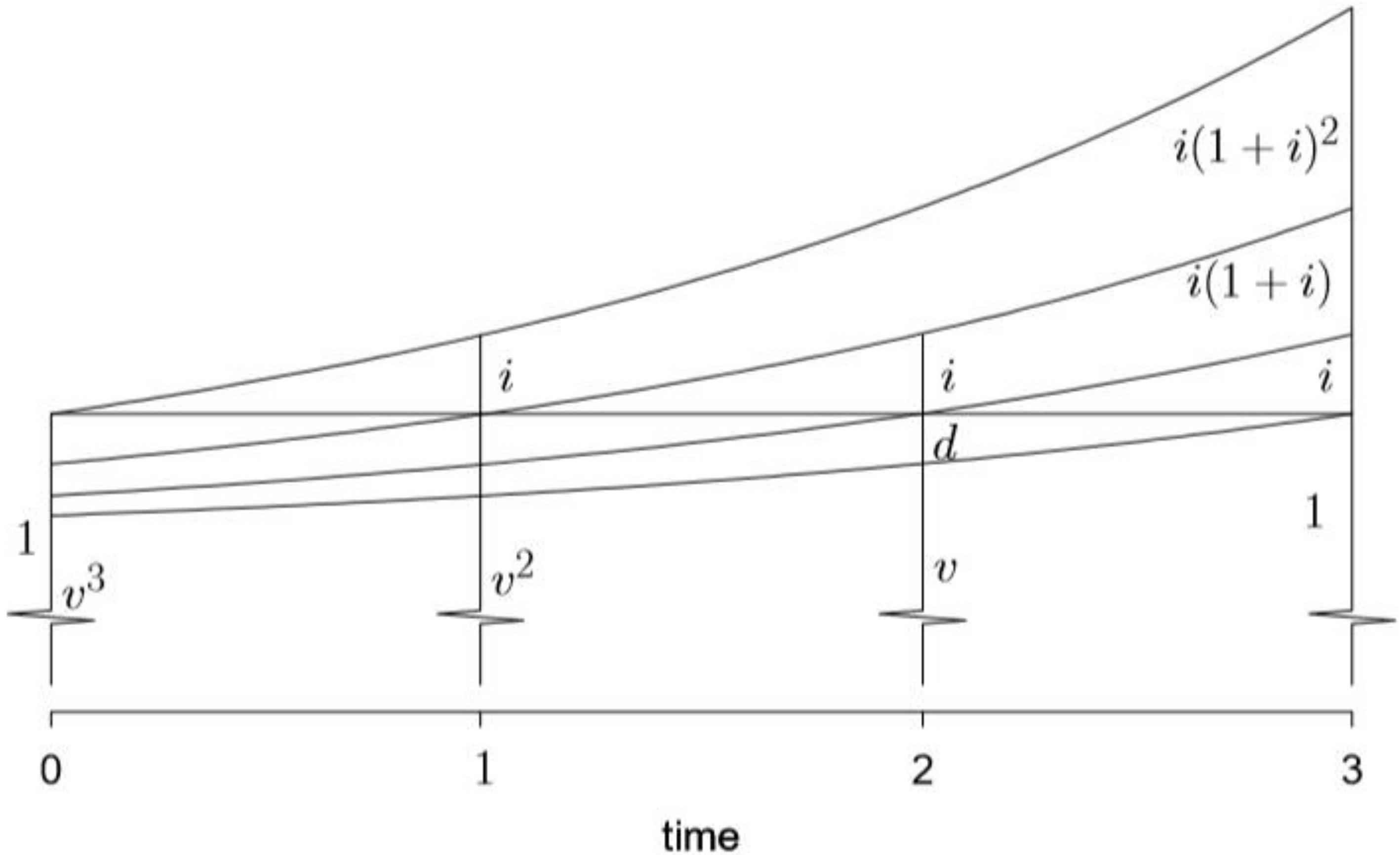
เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบย้อนหลัง

- ตัวอย่าง 1
  - ชายคนหนึ่งซื้อกรมธรรม์ประกันชีวิตแบบบำนาญที่จะจ่ายเงินให้ผู้เอาประกัน \$100 ตอนปลายปี ทุกๆ ปี นาน 20 ปี โดยที่จะเริ่มจ่ายงวดแรกให้ปลายปีนี้ สมมติว่าไม่มีกำไรและค่าใช้จ่ายอื่นๆ และบริษัทรับประกันใช้อัตราคิดลด 5% ต่อปีในการประเมินมูลค่าเงินงวด จงหาราคาของกรมธรรม์ดังกล่าว
    - $100a_{n|} = 100(1 - 1.05^{-20})/0.05 = \$1,246.2$

เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบย้อนหลัง



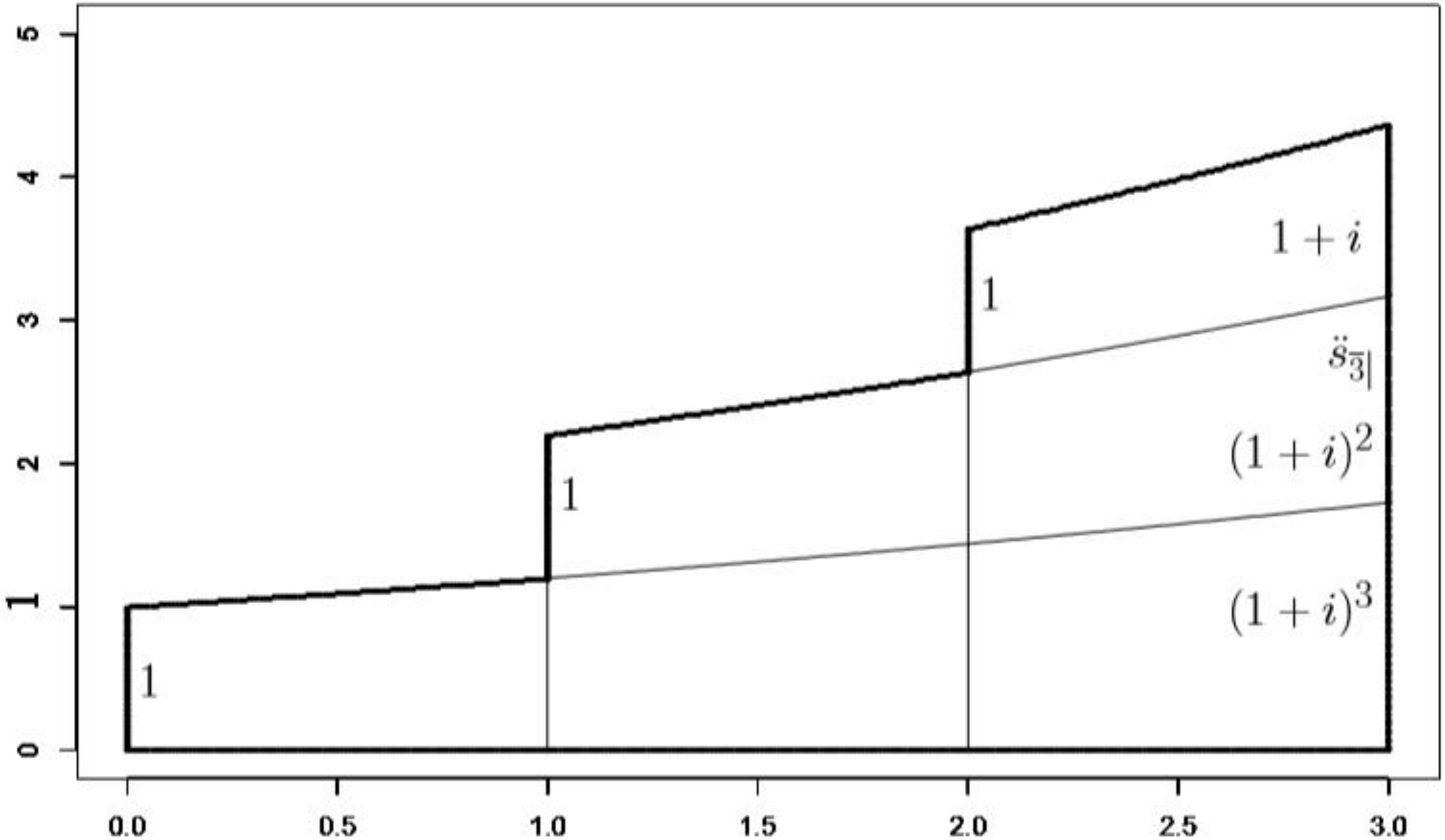
เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบย้อนหลัง



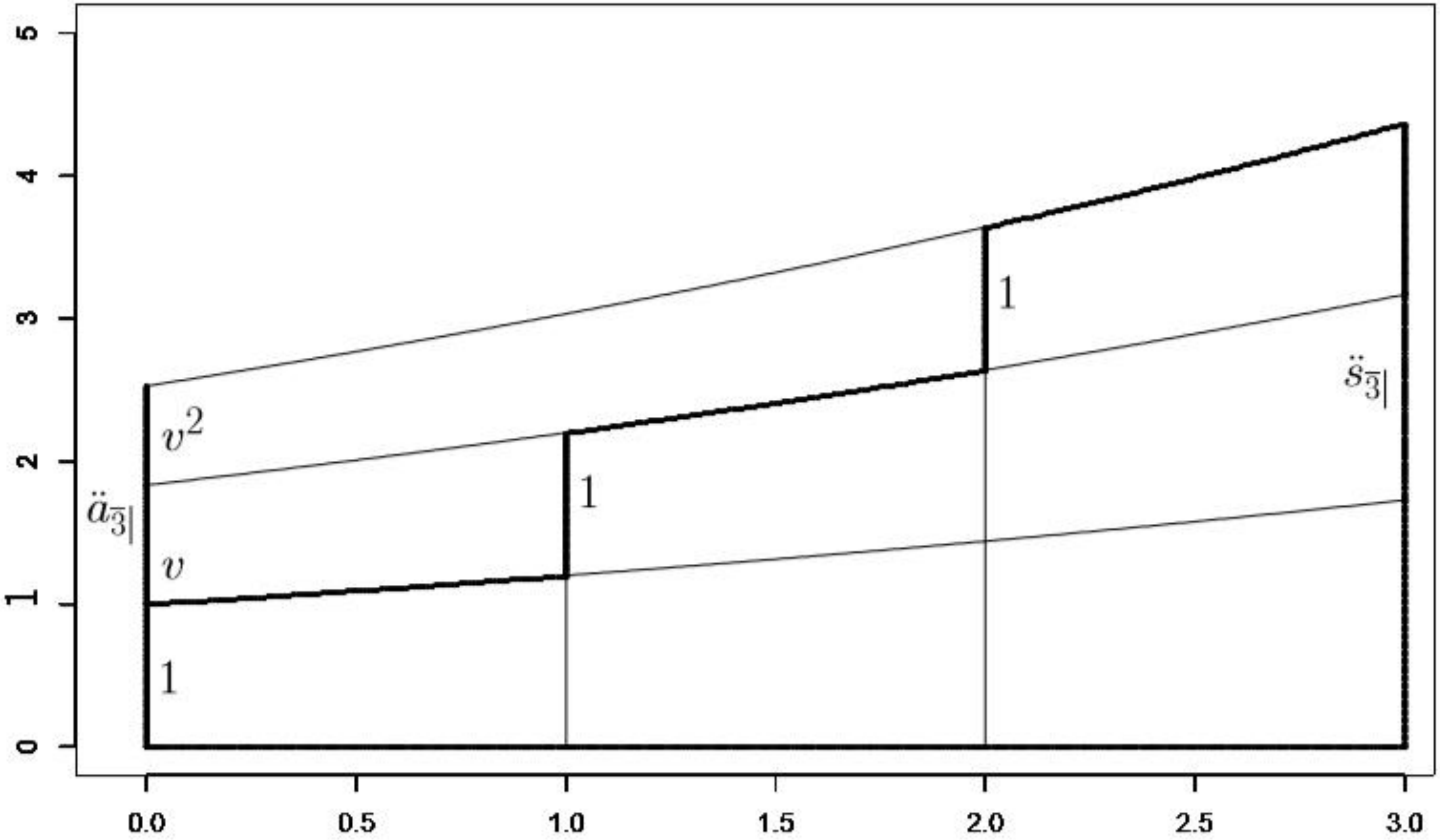
เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบย้อนหลัง

- มูลค่าอนาคต (จากแผนภาพ)
  - $s_{3|} = 1 + (1+i) + (1+i)^2$
  - $s_{3|} = a_{3|}(1+i)^3$
  - $(1+i)^3 = 1 + i\times[1 + (1+i) + (1+i)^2] \rightarrow s_{3|} = [(1+i)^3 - 1]/i$
- สูตรทั่วไป
  - $s_{n|} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} = [(1+i)^n - 1]/i$

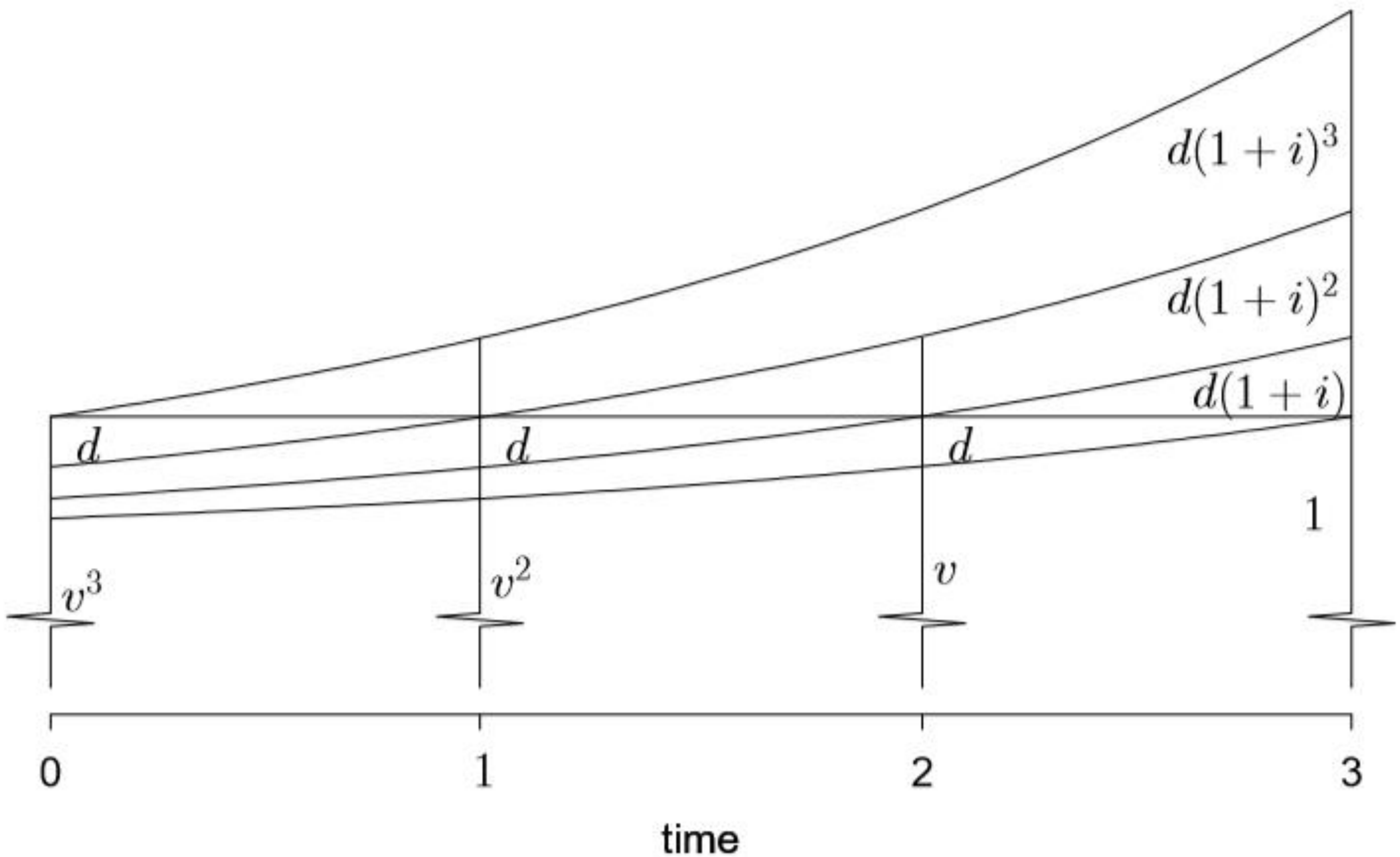
เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบล่วงหน้า



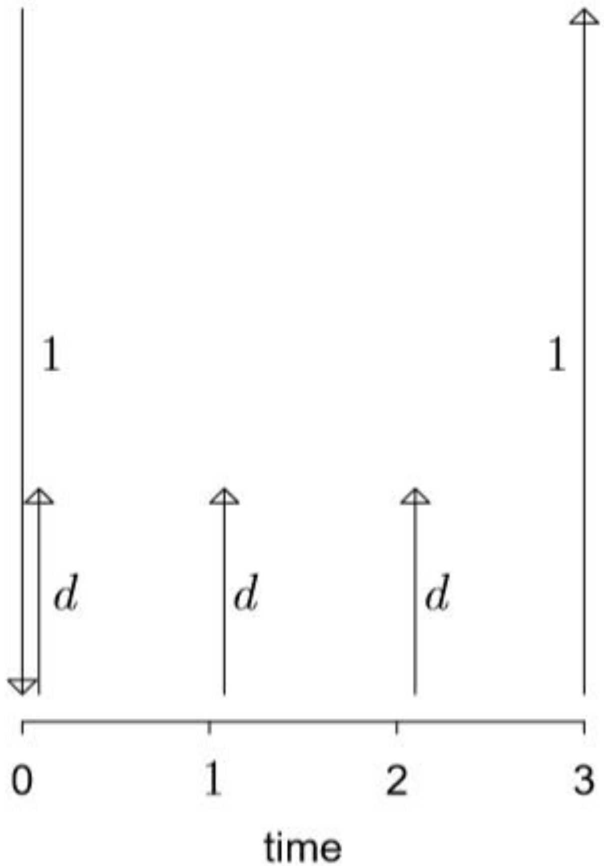
เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบล่วงหน้า

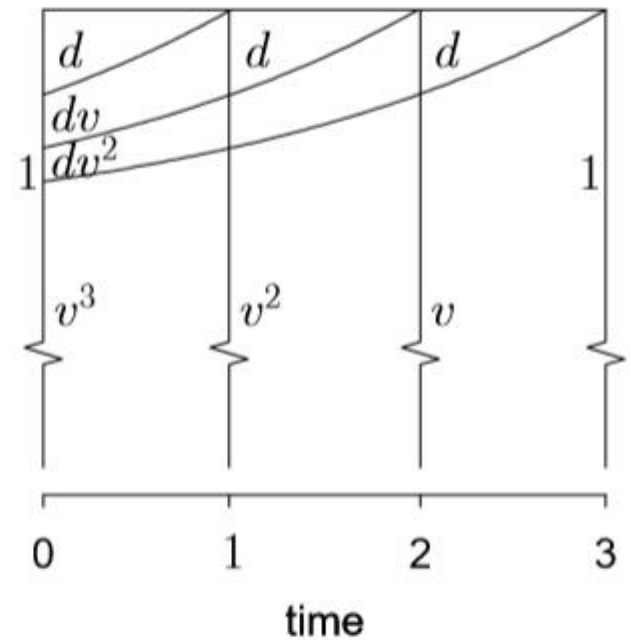


เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบล่วงหน้า



เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบล่วงหน้า





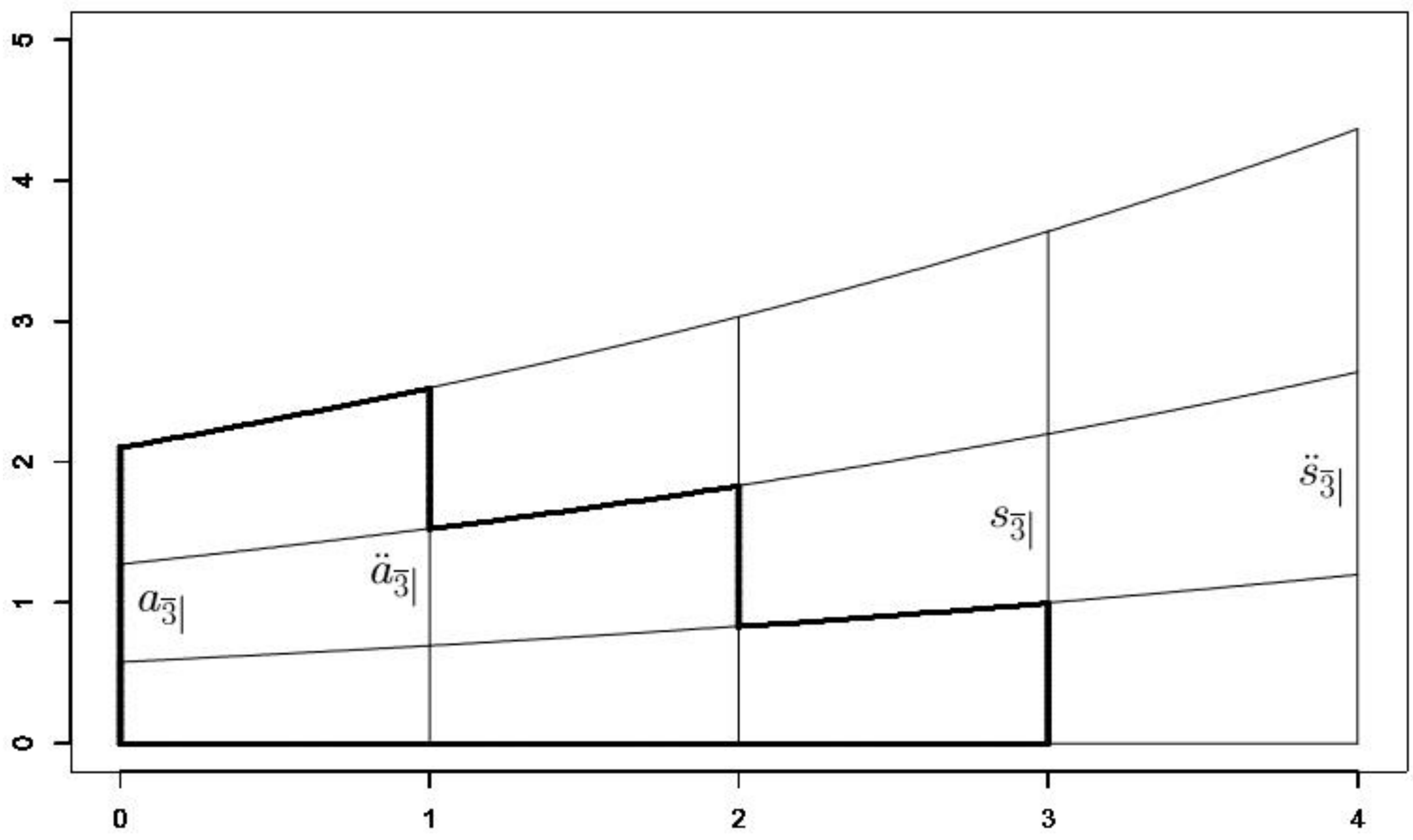
เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบย้อนหลัง

- มูลค่าอนาคต (จากแผนภาพ)
  - $\ddot{s}_{\overline{3}|} = (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3$
  - $\ddot{s}_{\overline{3}|} = \ddot{a}_{\overline{3}|}(1+i)^3$
  - $(1+i)^3 = 1 + d\times[(1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i)] \rightarrow \ddot{s}_{\overline{3}|} = [(1+i)^3 - 1]/d$
- สูตรทั่วไป
  - $\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i)^2 + (1+i) = [(1+i)^n - 1]/d$

เงินงวดจ่ายปีต่อปีแบบล่วงหน้า

- มูลค่าปัจจุบัน (จากแผนภาพ)
  - $\ddot{a}_{3|} = 1 + v + v^2$
  - $1 = d(1 + v + v^2) + v^3 \rightarrow \ddot{a}_{3|} = (1 - v^3)/d$
    - เทียบได้กับการฝากเงินในธนาคารในวันนี้เป็นจำนวน \$1 เพื่อถอนคืนในอีก 3 ปี ในระหว่างนี้ก็ถอนดอกเบี้ยออกมาใช้แบบล่วงหน้างวดละ d
- สูตรทั่วไป
  - $\ddot{a}_{n|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = (1 - v^n)/d$

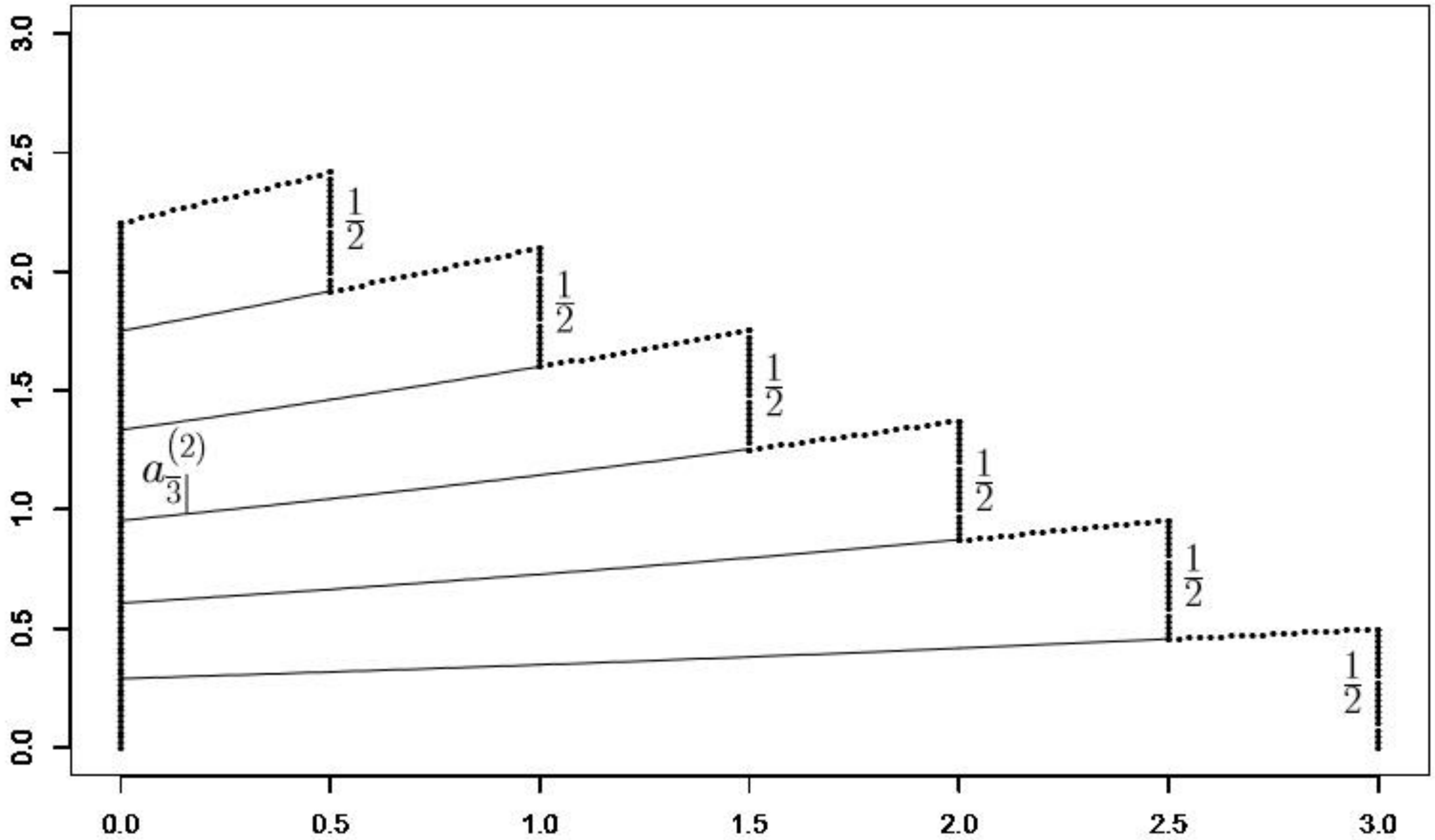
เปรียบเทียบ $a_{3|}$ $\ddot{a}_{3|}$ $s_{3|}$ และ $\ddot{s}_{3|}$



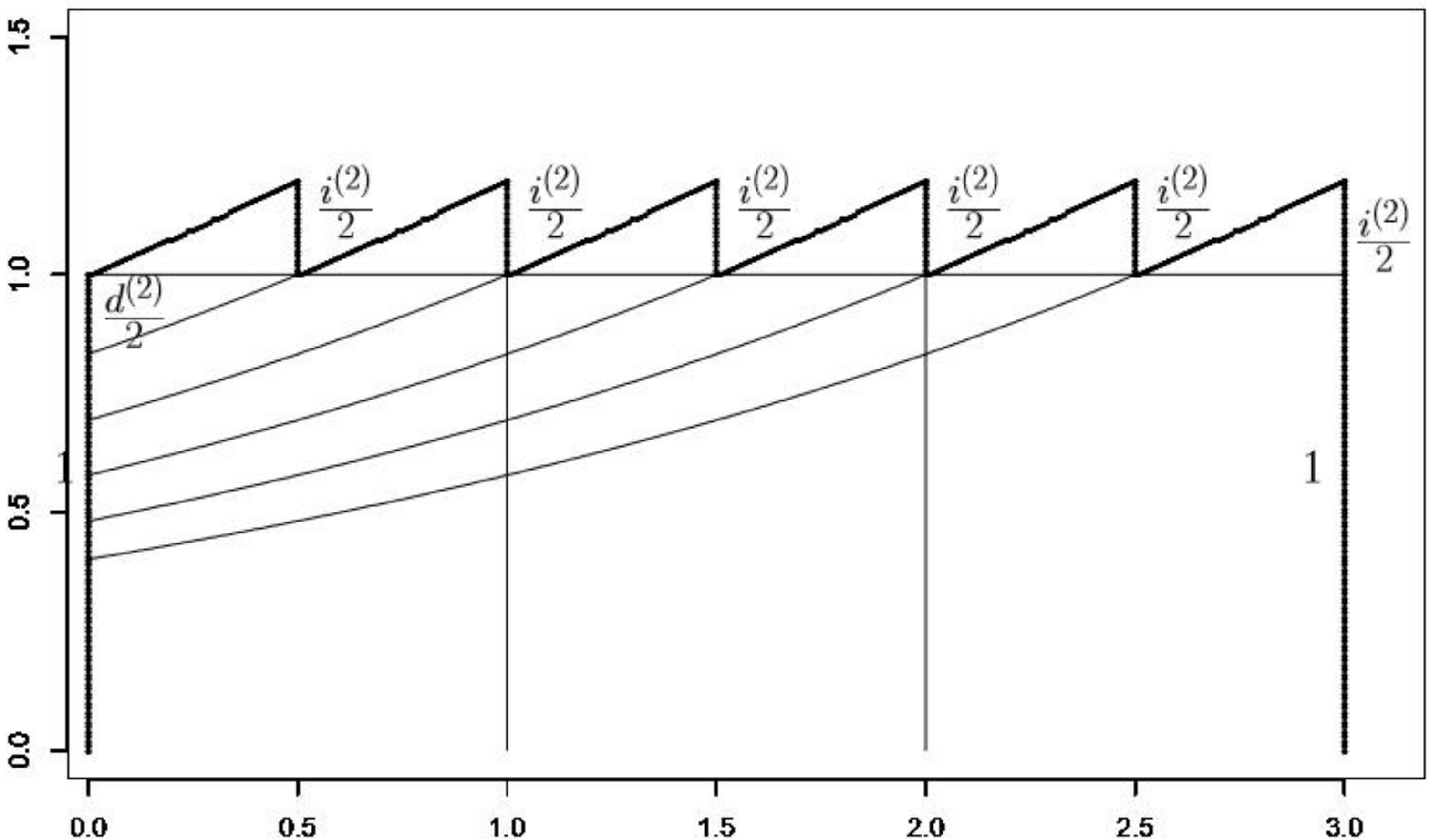
เปรียบเทียบ $a_{\overline{3|}}$ $\ddot{a}_{\overline{3|}}$ $s_{\overline{3|}}$ และ $\ddot{s}_{\overline{3|}}$

- จากแผนภาพ
  - $\ddot{a}_{\overline{3|}} = (1 + i)\times a_{\overline{3|}}$
  - $\ddot{s}_{\overline{3|}} = (1 + i)\times s_{\overline{3|}}$
  - $s_{\overline{3|}} = (1 + i)^3\times a_{\overline{3|}}$
  - $\ddot{s}_{\overline{3|}} = (1 + i)^3\times \ddot{a}_{\overline{3|}}$
  - $\ddot{a}_{\overline{3|}}/a_{\overline{3|}} = \ddot{s}_{\overline{3|}}/s_{\overline{3|}} = 1+i = i/d$
    - ถ้าต้องการเลื่อนการจ่ายเงินงวดจากปลายปีมาต้นปี มูลค่าปัจจุบันของเงินงวดจะเพิ่มขึ้น i/d เท่า หรืออาจกล่าวได้ว่า อัตราส่วนระหว่างมูลค่าปัจจุบันใหม่กับมูลค่าปัจจุบันเดิม จะเป็นอัตราส่วนระหว่างดอกเบี้ยสองประเภท

เงินงวดจ่ายทุกครึ่งปีแบบย้อนหลัง



เงินงวดจ่ายทุกครึ่งปีแบบย้อนหลัง



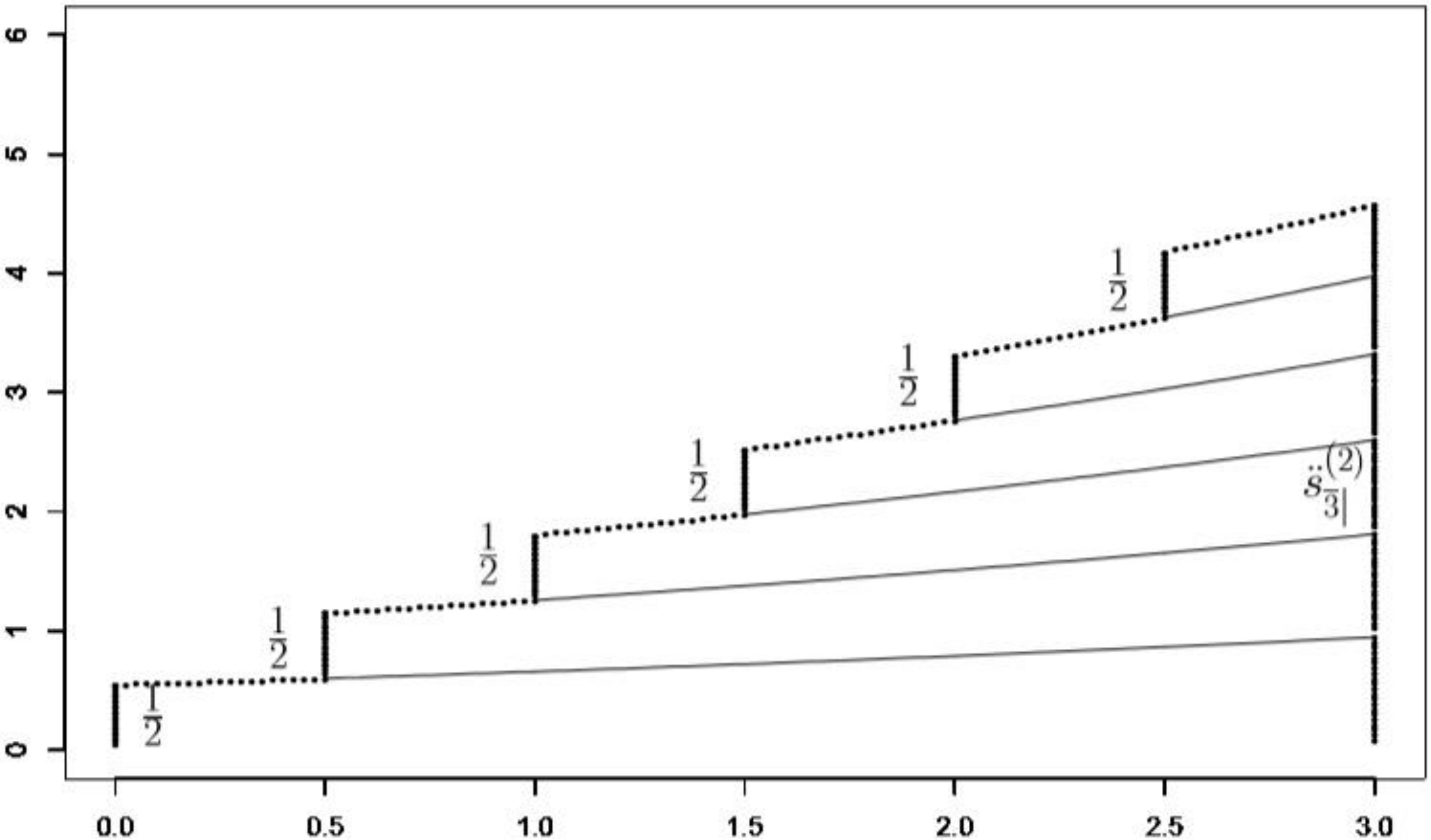
เงินงวดจ่ายทุกครึ่งปีแบบย้อนหลัง

- มูลค่าปัจจุบัน (จากแผนภาพ)
  - $a_{\overline{3|}}^{(2)}$ = ½×[$v^{1/2}$ + v + … + $v^{5/2}$ + v^3]
    - มูลค่าปัจจุบันของเงินงวดระยะเวลา 3 ปี ที่จ่ายเงินงวดละ ½ ทุกๆ ครึ่งปี
  - 1 = $i^{(2)}$/2×[$v^{1/2}$ + v + … + $v^{5/2}$ + v^3]+ v^3 → $a_{\overline{3|}}^{(2)}$ = (1 – v^3)/$i^{(2)}$

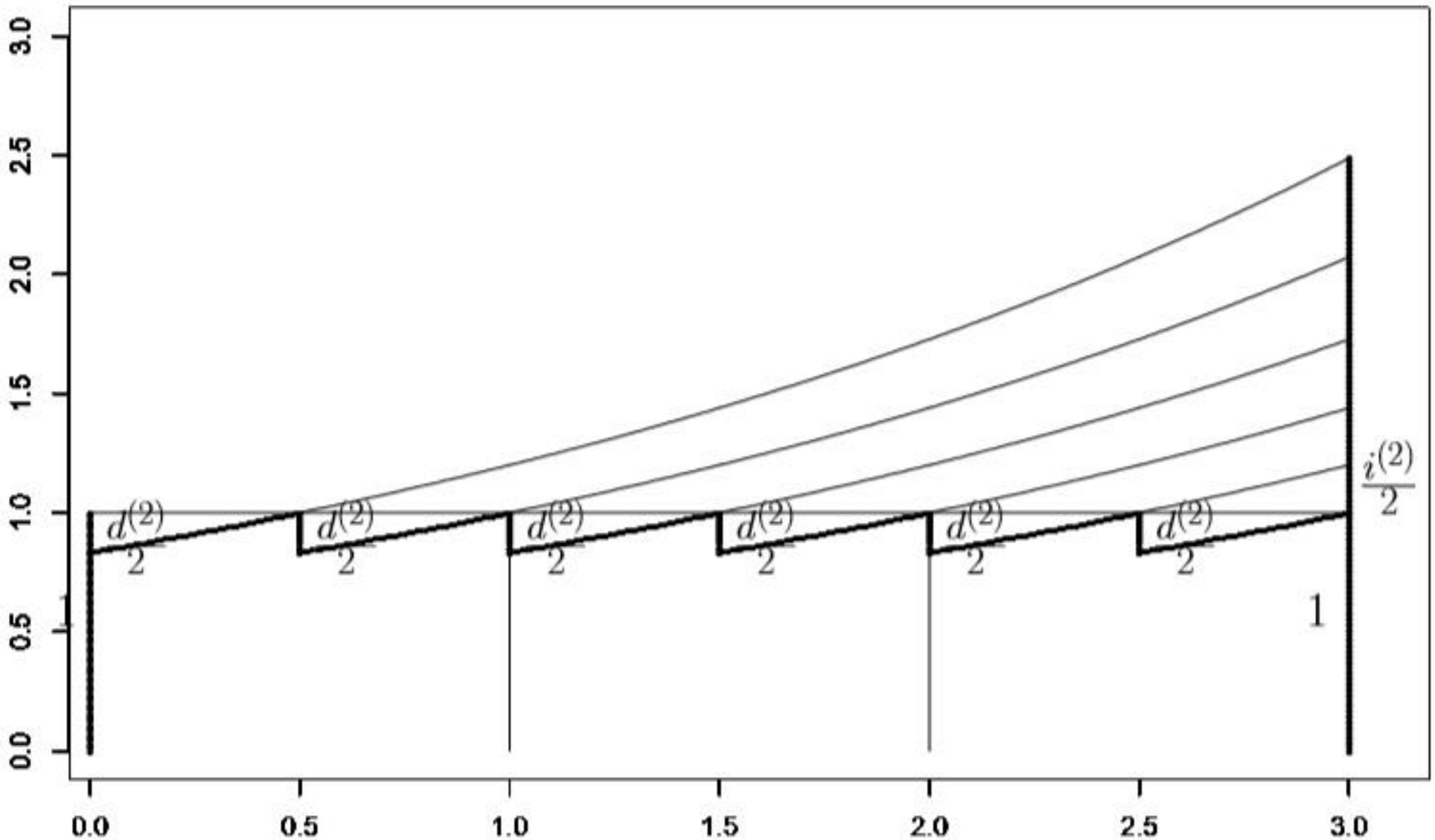
เงินงวดจ่ายทุกครึ่งปีแบบย้อนหลัง

- มูลค่าอนาคต
  - $s_{\overline{3|}}^{(2)}$ = ½×[(1+i)$^{5/2}$ + (1+i)^{2} + … + (1+i)$^{1/2}$ + 1]
  - $s_{\overline{3|}}^{(2)}$ = [(1+i)^{3} – 1]/i$^{(2)}$
    - จากการเปรียบเทียบสูตร $s_{\overline{3|}}$ = [(1+i)^{3} – 1]/I
  - เมื่อการจ่ายเงินจำนวน $1 ต่อปี ถูกแบ่งจ่ายมากกว่า 1 ครั้งต่อปี มูลค่าปัจจุบันหรือมูลค่าอนาคตจะถูกคูณด้วยอัตราส่วนระหว่างดอกเบี้ย 2 ประเภทที่เหมาะสม
    - เช่น เมื่อเปลี่ยนจากการจ่ายเงินต่อปีเป็นแบบต่อไตรมาส มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตจะถูกคูณด้วยอัตราส่วน i/i$^{(4)}$

เงินงวดจ่ายทุกครึ่งปีแบบล่วงหน้า



เงินงวดจ่ายทุกครึ่งปีแบบล่วงหน้า



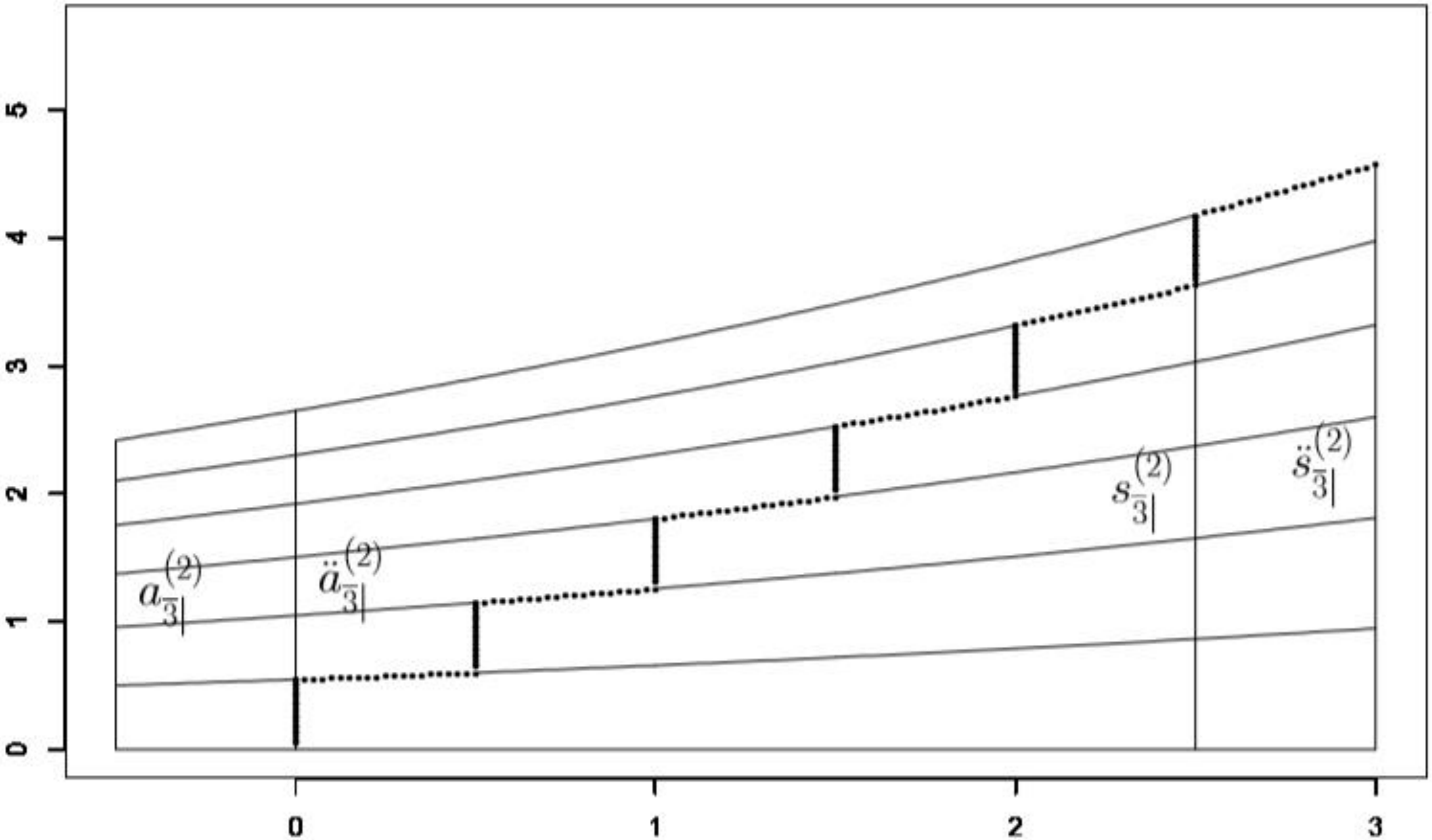
เงินงวดจ่ายทุกครึ่งปีแบบล่วงหน้า

- มูลค่าปัจจุบัน (จากแผนภาพ)
  - $\ddot{a}_{3|}^{(2)} = ½ \times [1 + v^{1/2} + v + \ldots + v^{5/2}]$
  - $1 = d^{(2)} \times \ddot{a}_{3|}^{(2)} + v^3 \rightarrow \ddot{a}_{3|}^{(2)} = (1 - v^3)/d^{(2)}$

เงินงวดจ่ายทุกครึ่งปีแบบล่วงหน้า

- มูลค่าอนาคต
  - $\ddot{s}_{3|}^{(2)} = ½×[(1+i)^3 + (1+i)^{5/2} + … + (1+i) + (1+i)^{1/2}]$
  - $(1+i)^3 = d^{(2)}×\ddot{s}_{3|}^{(2)} + 1 \rightarrow \ddot{s}_{3|}^{(2)} = [(1+i)^3 – 1]/ d^{(2)}$
    - มีความสอดคล้องกับสูตร $\ddot{s}_{3|} = [(1+i)^3 – 1]/d$

เงินงวดจ่ายทุกครึ่งปีแบบล่วงหน้า



เปรียบเทียบ $a_{3|}^{(2)}$ $\ddot{a}_{3|}^{(2)}$ $s_{3|}^{(2)}$ และ $\ddot{s}_{3|}^{(2)}$

- จากแผนภาพ
  - $\ddot{a}_{3|}^{(2)} = (1 + i)^{1/2} \times a_{3|}^{(2)}$
    - สอดคล้องกับสูตร $\ddot{a}_{3|} = (1 + i) \times a_{3|}$
  - $\ddot{s}_{3|}^{(2)} = 1 + i)^{1/2} \times s_{3|}^{(2)}$
    - สอดคล้องกับสูตร $\ddot{s}_{3|} = (1 + i) \times s_{3|}$

เปรียบเทียบ $a_{\overline{3|}}^{(2)}$ $\ddot{a}_{\overline{3|}}^{(2)}$ $s_{\overline{3|}}^{(2)}$ และ $\ddot{s}_{\overline{3|}}^{(2)}$

- จากแผนภาพ
  - $s_{\overline{3|}}^{(2)} = (1 + i)^3 \times a_{\overline{3|}}^{(2)}$
    - สอดคล้องกับสูตร $s_{\overline{3|}} = (1 + i)^3 \times a_{\overline{3|}}$
  - $\ddot{s}_{\overline{3|}}^{(2)} = (1 + i)^3 \times \ddot{a}_{\overline{3|}}^{(2)}$
    - สอดคล้องกับสูตร $\ddot{s}_{\overline{3|}} = (1 + i)^3 \times \ddot{a}_{\overline{3|}}$

เงินงวดจ่ายหลายครั้งต่อปี

- พิจารณาเงินงวดที่จ่ายเงินรวมทั้งหมด \$1 ต่อปี แต่จ่ายเงินแบบต่อเนื่อง (จากงวดละ 50c → 25c → 8 1/3 → … เมื่อจำนวนงวดจ่ายต่อปีเพิ่มเป็น 2 ครั้ง → 4 ครั้ง → 12 ครั้ง → …)
  - notation
    - $\bar{a}_n = \lim_{m\to\infty} a_{n|}^{(m)}$ และ $\bar{a}_n = \lim\limits_{m\to\infty} \ddot{a}_{n|}^{(m)}$
    - $\bar{s}_n = \lim\limits_{m\to\infty} s_{n|}^{(m)}$ และ $\bar{s}_n = \lim\limits_{m\to\infty} \ddot{s}_{n|}^{(m)}$
    - $\delta = \lim\limits_{m\to\infty} i^{(m)}$ และ $\delta = \lim\limits_{m\to\infty} d^{(m)}$

เงินงวดจ่ายหลายครั้งต่อปี

- พิจารณาเงินงวดที่จ่ายเงินรวมทั้งหมด $1 ต่อปี แต่จ่ายเงินแบบต่อเนื่อง (จากงวดละ 50c → 25c → 8 1/3 → … เมื่อจำนวนงวดจ่ายต่อปีเพิ่มเป็น 2 ครั้ง → 4 ครั้ง → 12 ครั้ง → …)
  - มูลค่าปัจจุบัน
    - $\because a_{\overline{n}|}^{(m)} = (1 - v^n)/i^{(m)} \rightarrow \bar{a}_n = \lim_{m\to\infty} a_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-v^n}{i^{(m)}} = \frac{1-v^n}{\delta}$
  - มูลค่าอนาคต
    - $\because \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = [(1+i)^n - 1]/\, d^{(m)} \rightarrow \bar{s}_n = \lim_{m\to\infty} \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^n-1}{d^{(m)}} = \frac{(1+i)^n-1}{\delta}$

เงินงวดจ่ายหลายครั้งต่อปี

- ตัวอย่าง 2
  - ชายคนหนึ่งจะได้รับเงินงวดจากรัฐบาลจำนวน $1 ต่อวัน เป็นระยะเวลา 2 ปี ในระหว่างปี 2559 และ 2560 จงหามูลค่าปัจจุบันของเงินงวดดังกล่าวในวันที่ 1 มกราคม 2559 และมูลค่าปัจจุบันของเงินงวดดังกล่าวในวันที่ 31 ธันวาคม 2560 สมมติว่า $i = 10\%$
    - การจ่ายต่อวันบ่อยพอที่จะพิจารณาเป็นการจ่ายแบบต่อเนื่องได้ ดังนั้น $\bar{a}_2 = (1 - v^2)/\delta = (1 - 1.1^{-2})/\ln 1.1 = 1.8209$
    - มูลค่าปัจจุบัน = $365 \times 1.8209 = 664.6$
    - มูลค่าอนาคต = $365 \times \bar{s}_2 = 365 \times [1.1^{-2} - 1]/\ln 1.1 = 804.2$

เงินงวดจ่ายหลายครั้งต่อปี

- ตัวอย่าง 3
  - ใช้ข้อมูลจากตัวอย่างที่แล้ว คำนวณ $a_{\overline{2|}}^{(365)}$ และ $\ddot{a}_{\overline{2|}}^{(365)}$
    - คำนวณ $i^{(365)}$ และ $d^{(365)}$
      - $1 + i^{(365)}/365 = 1.1^{1/365} \rightarrow i^{(365)} = 365(1.1^{1/365} - 1) = .09532$
      - $1 - d^{(365)}/365 = 1.1^{-1/365} \rightarrow d^{(365)} = 365(1 - 1.1^{-1/365}) = .09529774$
      - หรือใช้ approximation $i^{(365)} - \delta \approx \delta - d^{(365)} \rightarrow d^{(365)} \approx 2\delta - i^{(365)} - i^{(365)} = .09529773$
    - $a_{\overline{2|}}^{(365)} = (1 - v^2)/ i^{(365)} = 1.820698 \rightarrow PV = 664.55$
    - $\ddot{a}_{\overline{2|}}^{(365)} = (1 - v^2)/ d^{(365)} = 1.821174 \rightarrow PV = 664.73$

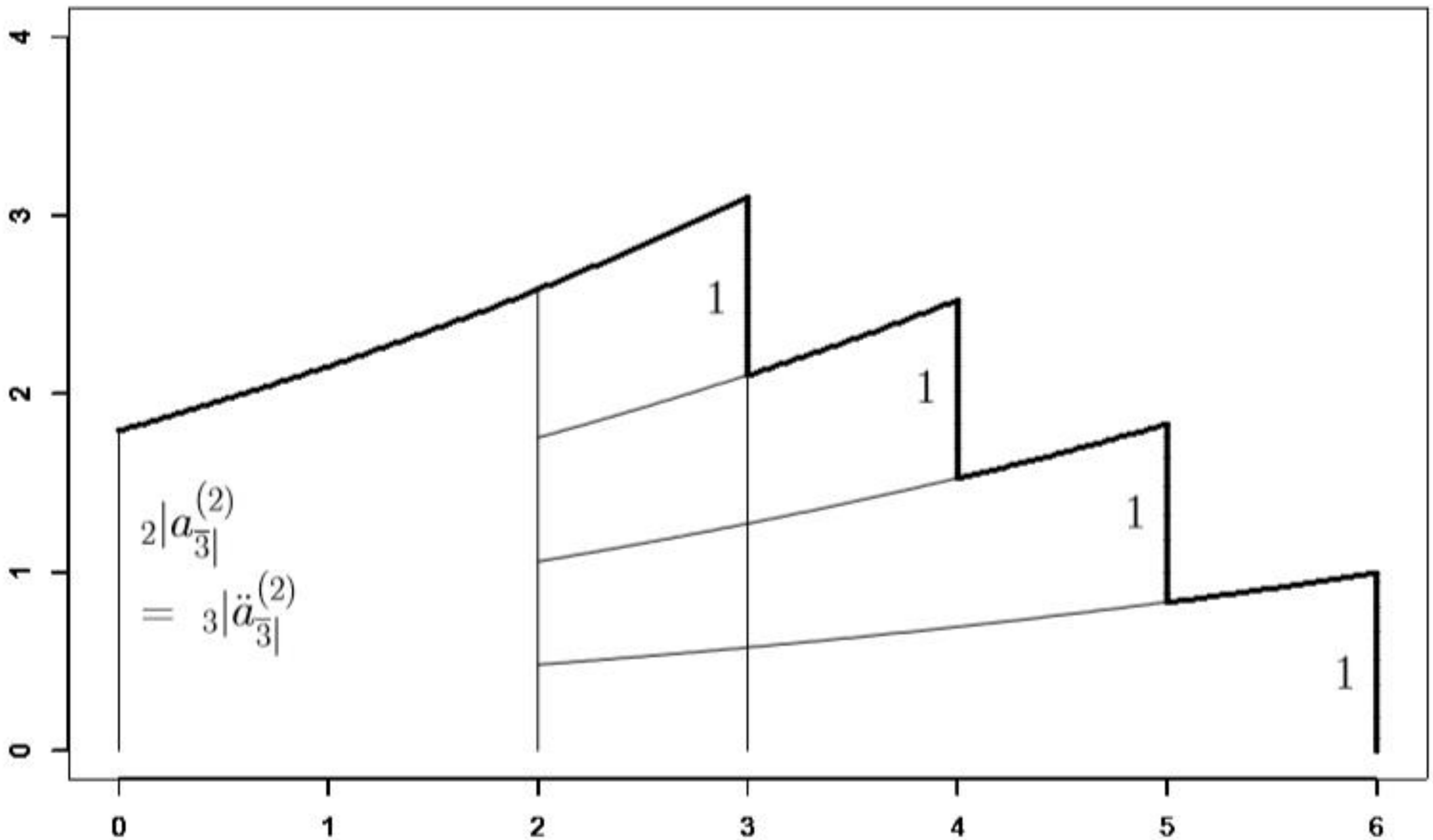
เปรียบเทียบมูลค่าเงินงวด

- ทบทวน
  - $a_{\overline{n|}}^{(m)} = (1 - v^n)/i^{(m)}$
  - $\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} = (1 - v^n)/d^{(m)}$
  - $s_{\overline{n|}}^{(m)} = (1 + i)^n \times a_{\overline{n|}}^{(m)}$ และ $\ddot{s}_{\overline{3|}}^{(2)} = (1 + i)^3 \times \ddot{a}_{\overline{3|}}^{(2)}$
  - $s_{\overline{n|}}^{(m)} = [(1 + i)^n - 1]/ i^{(m)}$ และ $\ddot{s}_{\overline{3|}}^{(2)} = [(1 + i)^n - 1]/d^{(m)}$
  - $d < d^{(2)} < d^{(4)} < d^{(12)} < \ldots < \delta < \ldots < i^{(12)} < i^{(4)} < i^{(2)} < i$

เปรียบเทียบมูลค่าเงินงวด

- ดังนั้น
  - $a_{n|} < a_{n|}^{(2)} < a_{n|}^{(4)} < a_{n|}^{(12)} < \ldots < \bar{a}_{n} < \ddot{a}_{n|}^{(12)} < \ddot{a}_{n|}^{(4)} < \ddot{a}_{n|}^{(2)} < \ddot{a}_{n|}$
  - $s_{n|} < s_{n|}^{(2)} < s_{n|}^{(4)} < s_{n|}^{(12)} < \ldots < \bar{s}_{n} < \ddot{s}_{n|}^{(12)} < \ddot{s}_{n|}^{(4)} < \ddot{s}_{n|}^{(2)} < \ddot{s}_{n|}$

เงินงวดเลื่อนจ่าย

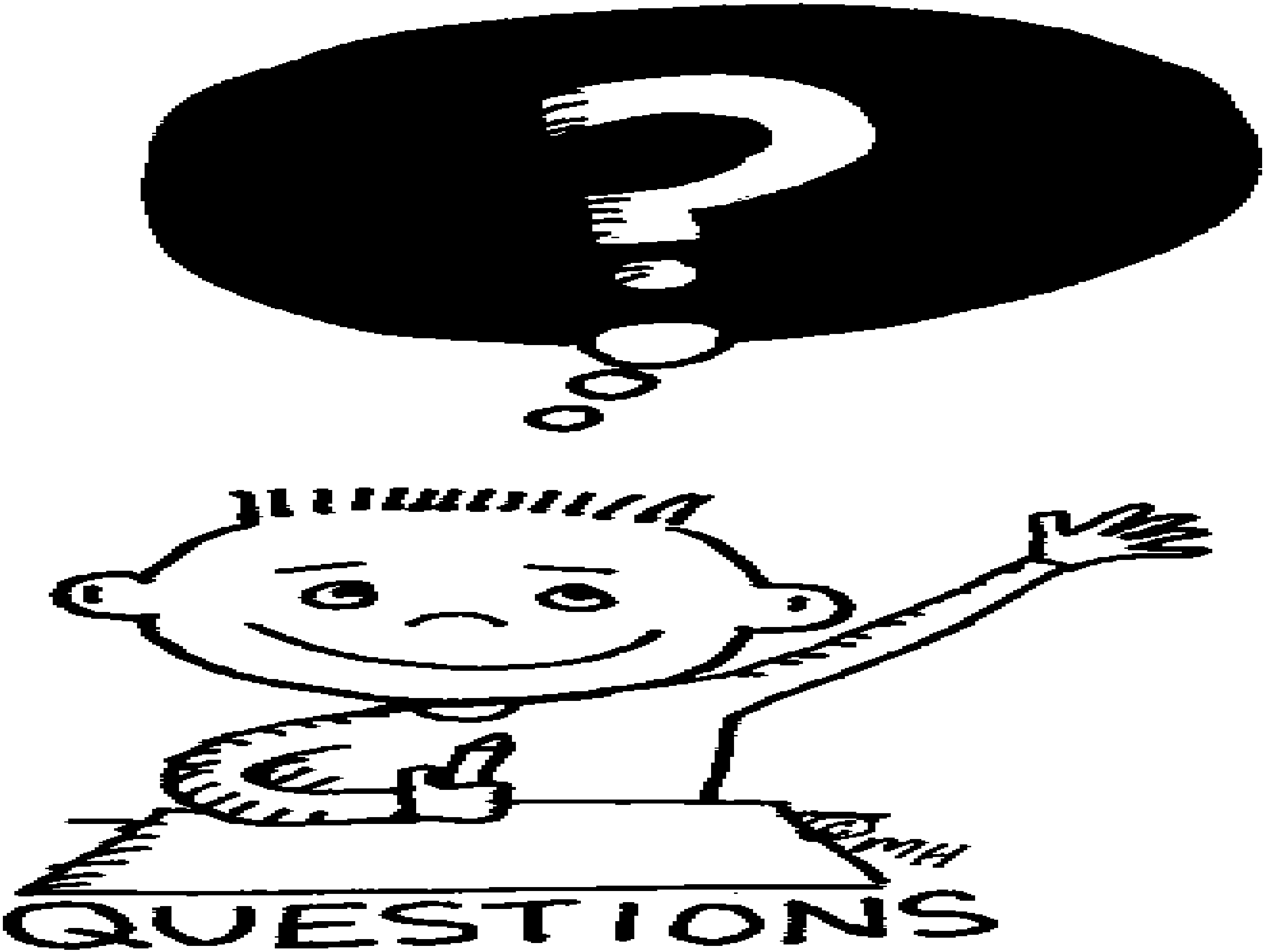


เงินงวดเลื่อนจ่าย

- ตัวอย่าง 4
  - เงินงวดประเภทหนึ่งเลื่อนระยะเวลาการจ่ายเงินงวดแรกออกไป 2 ปีนับจากวันนี้ ถ้าเป็นการจ่ายแบบล่วงหน้า หรือ 3 ปีนับจากวันนี้ ถ้าเป็นการจ่ายแบบย้อนหลัง โดยจะจ่ายเงินให้ \$1 ทุกปีเป็นเวลา 4 ปี จงคำนวณมูลค่าปัจจุบัน
    - ${}_{2|}a_{\overline{4|}} = v^3 + v^4 + v^5 + v^6 = v^2(v + v^2 + v^3 + v^4) = v^2 \times a_{\overline{4|}} = v^2 \times (1 - v^4)/i$
    - ${}_{3|}\ddot{a}_{\overline{4|}} = v^3 + v^4 + v^5 + v^6 = v^3(1 + v + v^2 + v^3) = v^3 \times \ddot{a}_{\overline{4|}} = v^3 \times (1 - v^4)/d$

เงินงวดเลื่อนจ่าย

- ตัวอย่าง 5
  - เงินงวดประเภทหนึ่งเลื่อนระยะเวลาการจ่ายเงินงวดแรกออกไป 3.5 ปีนับจากวันนี้ ถ้าเป็นการจ่ายแบบล่วงหน้า หรือ 3 ปีนับจากวันนี้ ถ้าเป็นการจ่ายแบบย้อนหลัง โดยจะจ่ายเงินให้รวม $1 ต่อปี จ่ายทุกครึ่งปี เป็นเวลา 10 ปี จงคำนวณมูลค่าปัจจุบัน
    - ${}_{3}|a_{\overline{10|}}^{(2)} = \frac{1}{2} \times (v^{3.5} + v^{4} + v^{4.5} + \ldots + v^{13}) = v^{3} \times (1 - v^{10}) / i^{(2)}$
    - ${}_{3.5}|\ddot{a}_{\overline{10|}}^{(2)} = v^{3.5} \times (1 - v^{10}) / d^{(2)}$


QUESTIONS

- Email:
  - fbusnwk@ku.ac.th
- Homepage:
  - http://fin.bus.ku.ac.th/nattawoot.htm
- Phone:
  - 02-9428777 Ext. 1218
- Mobile:
  - 087- 5393525
- Office:
  - ชั้น 9 ตึกใหม่คณะบริหารธุรกิจ ม.เกษตรศาสตร์ บางเขน